13. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

План:

1. Общие сведения о системах дифференциальных уравнений

2. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Сведение к одному уравнению более высокого порядка

Ключевые слова и словосочетания

Система дифференциальных уравнений, задача Коши для системы, система линейная дифференциальных уравнений-линейная система

1. Общие сведения о системах дифференциальных уравнений

Решение той или иной задачи может потребовать нахождения не одной, а сразу нескольких неизвестных функций. Для этого необходимо располагать, вообще говоря, таким же числом уравнений. Если каждое из этих уравнений является дифференциальным, т.е. имеет вид соотношения, связывающего неизвестные функции и их производные, то говорят о **системе дифференциальных уравнений.** Ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений первого порядка: это означает, что в уравнения не входят производные порядка выше, чем 1.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений аргумент обозначают, как правило, через t, а сами неизвестные функции – через $x_1(t),\ x_2(t)$ и т.д. Так, система дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями записывается обычно в виде

$$\begin{cases} \varphi\left(t,\ x_1,\ x_2,\ \dfrac{dx_1}{dt},\ \dfrac{dx_2}{dt}\right) = 0, \\ \psi\left(t,\ x_1,\ x_2,\ \dfrac{dx_1}{dt},\ \dfrac{dx_2}{dt}\right) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

На системы дифференциальных уравнений естественным образом обобщается постановка задачи Коши для одного уравнения. Например, в случае системы (1) задача Коши состоит в нахождении решения $x_1(t),\ x_2(t)$, удовлетворяющего начальным условиям $x_1(t_0) = x_1^0,\ \ x_2(t_0) = x_2^0$, где $t_0,\ x_1^0,\ x_2^0$ - заданные числа. Для случая системы может быть доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши, аналогичная теореме из § 30.

К системам дифференциальных уравнений первого порядка в известном смысле сводятся уравнения (и системы уравнений) любого порядка. Проиллюстрируем это на примере уравнения третьего порядка. Пусть дано уравнение

$$y''' = f(x,\ y,\ y',\ y'').$$

Если обозначить функции y' и y'' соответственно через u и v, то уравнение можно заменить системой

$$\begin{cases} y' = u, \\ u' = v, \\ v' = f(x,\ y,\ u,\ v), \end{cases}$$

состоящей из трех уравнений первого порядка с тремя неизвестными функциями $y(x)$, $u(x)$, $v(x)$. Аналогичное истолкование допускает любое другое дифференциальное уравнение (или система уравнений).

2. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Сведение к одному уравнению более высокого порядка.

Ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений специального вида, называемых **линейными системами.** В случае двух неизвестных функций $x_1(t),\ \ x_2(t)$ линейная система имеет вид

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \\[2ex]
\dfrac{dx_2}{dt} = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2,
\end{cases}
\tag{2}
$$

где коэффициенты α_{ij} являются, вообще говоря, функциями независимой переменной t. Будем считать эти функции непрерывными; тогда для заданной системы заведомо выполняются условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Один из методов интегрирования системы (2) заключается в сведении системы к одному уравнению второго порядка с одной неизвестной функцией (о сведении одного уравнения произвольного порядка к системе уравнений первого порядка было сказано в п.1). Дифференцируя (по t) обе части первого уравнения системы (2), находим

$$
\frac{d^2x_1}{dt^2} = \alpha_{11}\frac{dx_1}{dt} + \alpha_{12}\frac{dx_2}{dt} + \frac{d\alpha_{11}}{dt}x_1 + \frac{d\alpha_{12}}{dt}x_2,
$$

откуда, заменяя производные $\dfrac{dx_1}{dt}$, $\dfrac{dx_2}{dt}$ их выражениями из самой системы, имеем

$$
\frac{d^2x_1}{dt^2} = \alpha_{11}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2) + \alpha_{12}(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) + \frac{d\alpha_{11}}{dt}x_1 + \frac{d\alpha_{12}}{dt}x_2.
$$

Группируя в правой части все члены с x_1, а также с x_2, получим уравнение вида

$$
\frac{d^2x_1}{dt^2} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2,
\tag{3}
$$

где коэффициенты β_1 и β_2 определенным образом выражаются через коэффициенты α_{ij} и их производные (записывать эти выражения не будем). Комбинируя уравнение (3) с первым уравнением системы (2), получаем

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \\ \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2. \end{cases} \tag{4}$$

Предположим, что в рассматриваемой области изменения t определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Тогда систему (4) можно решить относительно x_1 и x_2, т.е. выразить x_1 и x_2 через $\dfrac{dx_1}{dt}$ и $\dfrac{d^2x_1}{dt^2}$. В результате приходим к уравнениям вида

$$x_1 = a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{d^2x_1}{dt^2}, \tag{5}$$

$$x_2 = c\frac{dx_1}{dt} + d\frac{d^2x_1}{dt^2} \tag{6}$$

(выражения для a, b, c, d приводить не будем). Первое из них представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией $x_1(t)$. К нему приложима вся теория, изложенная в §31.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2, \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Решение

Дифференцируя обе части первого уравнения, имеем

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 3\frac{dx_1}{dt} - 2\frac{dx_2}{dt} = 3(3x_1 - 2x_2) - 2(2x_1 - x_2) = 5x_1 - 4x_2.$$

В комбинации с первым уравнением данной систем это приводит к системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{d^2x_1}{dt} = 5x_1 - 4x_2. \end{cases}$$

Отсюда находим выражения для x_1 и x_2 через $\dfrac{dx_1}{dt}$ и $\dfrac{d^2x_1}{dt^2}$:

$$x_1 = 2\frac{dx_1}{dt} - \frac{d^2x_1}{dt^2}, \tag{7}$$

$$x_2 = \frac{5}{2}\frac{dx_1}{dt} - \frac{3}{2}\frac{d^2x_1}{dt^2}. \tag{8}$$

В результате приходим к уравнению второго порядка для неизвестной функции $x_1(t)$:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - 2\frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0.$$

Решая это уравнение известным способом, получим

$$x_1 = (C_1 + C_2 t)e^t,$$

после чего из выражения (8) находим

$$x_2 = \frac{1}{2}(2C_1 - C_2 + 2C_2 t)e^t.$$

Упражнения

1. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2 + 2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_1 - 2x_2 - 4x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2 - 2x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 5x_1 + 2x_2 + 7x_3. \end{cases}$$

3. Решить систему

$$\begin{cases} x_1' + x_2' - x_1 = e^t, \\ 2x_1' + x_2' + 2x_2 = \cos t \end{cases}$$

при данных начальных условиях $t_0 = 0, \quad x_0 = -\dfrac{3}{17}, \quad y_0 = \dfrac{4}{17}$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте общие сведения о системах дифференциальных уравнений. Обычно, в каком виде записывается система дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями?

2. Как на систему дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями обобщается постановка задачи Коши для одного уравнения. В чем заключается задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями?

3. К системам дифференциальных уравнений первого порядка в известном смысле сводятся уравнения любого порядка. Проиллюстрируйте это на примере.

4. Какой вид имеет линейная система дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями?

5. Какие условия на коэффициенты линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши?

6. Один из методов интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями заключается в сведении системы к одному уравнению второго порядка с одной неизвестной функцией. Продемонстрируйте это.

7. Опишите алгоритм метода сведения линейной системы к одному уравнению более высокого порядка.